Etude de $O(p,q)$.

Thm : Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$. $O(p,q) \simeq O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$

Lem : $\exp : S_n \to S_n^{++}$ définit un homéomorphisme.

· Bien défini car $S \in S_n \Rightarrow S \sim \mathrm{diag}(\lambda_i)$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R} \Rightarrow \exp S \sim \mathrm{diag}(\exp \lambda_i) \in S_n^{++}$.

· Surjective : Si $B = P \,\mathrm{diag}\, \lambda_i \,{}^tP^{-1} \in S_n^{++}$, $B = \exp(P\,\mathrm{diag}(\ln \lambda_i)\,{}^tP^{-1}) \in \exp(S_n)$.

· Injective : $\exp A_1 = \exp A_2 \Rightarrow$ en écrivant $A_2 = Q(\exp A_2)$ interpolation de Lagrange
A_1 commute avec $\exp A_1 = \exp A_2$ donc avec A_2.
$\Rightarrow A_1, A_2$ codiagonalisable $\Rightarrow \exp D_1 = \exp D_2 \Rightarrow D_1 = D_2$.

: Soit $B_p = \exp A_p \to \exp A = B$. Montrons que $A_p \to A$.
Par décomposition polaire, $\forall M \in S_n(\mathbb{R})$, $|||M|||_2 = \sqrt{\rho({}^tMM)} = \rho(M)$.
Or (B_p) est bornée, et par continuité de l'inverse, (B_p^{-1}) aussi, donc $\bigcup \mathrm{Sp}(B_p) \subset [\alpha, \beta]$
donc $\bigcup \mathrm{Sp}(A_p) \subset [\ln \alpha, \ln \beta]$ compact. Donc (A_p) bornée.
Il existe une extractrice : $A_{\varphi(p)} \to \tilde{A}$.
Ainsi $\exp \tilde{A} = \lim_{p \to +\infty} \exp A_{\varphi(p)} = \lim_{p \to +\infty} B_{\varphi(p)} = \exp A$ donc par injectivité, $A = \tilde{A}$.

· Soit $M \in O(p,q) \subset GL_n(\mathbb{R})$. Par décomposition polaire, $M = OS$ avec $O \in O(n)$, $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
Soit $T = {}^tMM = S^2 \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. $\exists U \in S_n$, $T = \exp U$.
$M \in O(p,q) \Leftrightarrow M I_{p,q} {}^tM = I_{p,q} \Leftrightarrow {}^tM^{-1} I_{p,q} M^{-1} = I_{p,q} \Leftrightarrow {}^tM^{-1} \in O(p,q) \Leftrightarrow {}^tM \in O(p,q)$
De plus $T \in O(p,q) \Leftrightarrow T I_{p,q} {}^tT = I_{p,q} \Leftrightarrow {}^tT = I_{p,q}^{-1} T^{-1} I_{p,q} \Leftrightarrow \exp {}^tU = \exp(-I_{p,q} U I_{p,q}^{-1})$
$\underset{\text{bijectivité}}{\Leftrightarrow} {}^t\exp\left(\frac{U}{2}\right) = \exp\left(-I_{p,q} \frac{U}{2} I_{p,q}^{-1}\right) = I_{p,q} \exp\left(\frac{U}{2}\right)^{-1} I_{p,q}^{-1} \Leftrightarrow \exp\left(\frac{U}{2}\right) \in O(p,q)$
Et $\exp U = T = S^2$ donc par unicité de la racine, $S = \exp \frac{U}{2} \in O(p,q)$.
Puis $O = MS^{-1}$, $O I_{p,q} {}^tO = M(S^{-1} I_{p,q} {}^tS^{-1}) {}^tM = M I_{p,q} {}^tM = I_{p,q}$
Donc par décomposition polaire, $O(p,q) \simeq (O(p,q) \cap O(n)) \times (O(p,q) \cap S_n^{++})$.

· Soit $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in O(p,q) \cap O(n)$. $\begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A{}^tA - B{}^tB & A{}^tC - B{}^tD \\ C{}^tA - D{}^tB & C{}^tC - D{}^tD \end{pmatrix}$
et $\begin{pmatrix} I_p & \\ & I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A{}^tA + B{}^tB & A{}^tC + B{}^tD \\ C{}^tA + D{}^tB & C{}^tC + D{}^tD \end{pmatrix}$ donc $B{}^tB = C{}^tC = 0$, puis $B = C = 0$.
Donc $O(p,q) \cap O(n) \simeq O(p) \times O(q)$.

· Posons $L = \{U \in M_n(\mathbb{R}),\ U I_{p,q} + I_{p,q} U = 0\}$.
* Si $U \in L \cap S_n$, alors $U = {}^tU = -I_{p,q} U I_{p,q}^{-1}$ donc $\exp U \in O(p,q)$, et $\exp U \in S_n^{++}$.
* Si $T \in O(p,q) \cap S_n^{++}$, $T = \exp U$ avec $U \in S_n$, puis ${}^tU = -I_{p,q} U I_{p,q}^{-1}$ donc $U \in L$.
car $U \in S_n$.

Donc $\exp : L \cap S_n \to O(p,q) \cap S_n^{++}$ est un homéo.
Si $U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, $U \in L \cap S_n \Leftrightarrow \begin{cases} {}^tA = A,\ {}^tD = D,\ {}^tB = C \\ A = 0,\ D = 0 \end{cases}$ donc $L \cap S_n \simeq \left\{ \begin{pmatrix} 0 & {}^tB \\ B & 0 \end{pmatrix}, B \in M_{pq}(\mathbb{R}) \right\} \simeq \mathbb{R}^{pq}$